Constructions et propriétés des homothéties

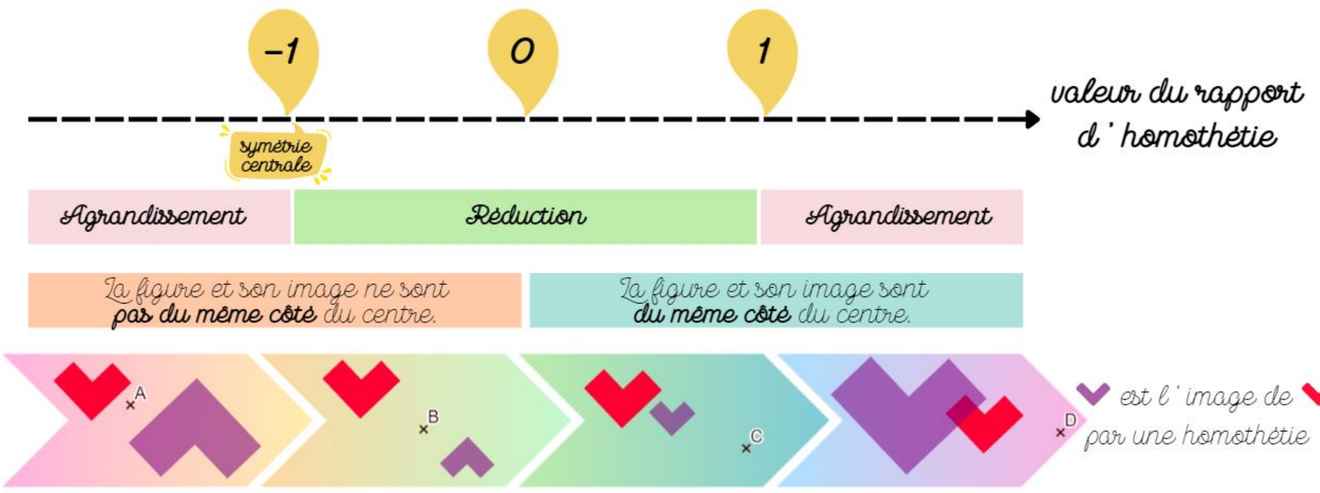
Je révise mon brevet pas à pas.

Correction

Prérequis : cours « Introduction sur les homothéties ».

- Une **homothétie** est une **transformation géométrique**, plus précisément un **agrandissement** ou une **réduction** d'une figure géométrique, définie par un **centre** et un nombre, appelé **rapport**.

- On a :



Construire l'image d'une figure par homothétie.

Méthode pour construire l'image d'une figure
par une homothétie de <u>rapport positif</u>.

→ On construit **l'image de chaque point** caractéristique de la figure.

Pour construire l'image d'un point M par l'homothétie de centre O et de **rapport positif** $\boldsymbol{k}$:

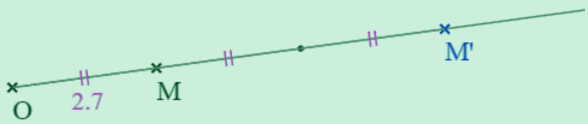
① On trace **la demi-droite [OM]** : l'image M' se trouve **du même côté de M** par rapport à O, donc **on prolonge du côté de M** pour un rapport **positif**.

② Si besoin, **on mesure** OM, puis **on calcule** $k \times \mathrm{OM}$.

③ On place M' sur [OM] tel que : $\mathrm{OM'} = \boldsymbol{k} \times \mathrm{OM}$

<u>Exemple</u> : rapport $k = 3$

- Je trace [OM] ;
- OM = 2,7 cm ; je calcule $3 \times 2{,}7 = 8{,}1$;
- je place M' sur [OM] tel que OM' = 8,1 cm.



Lorsqu'on construit une homothétie de rapport **positif**, le point et son image se trouvent du même « côté » par rapport au centre.

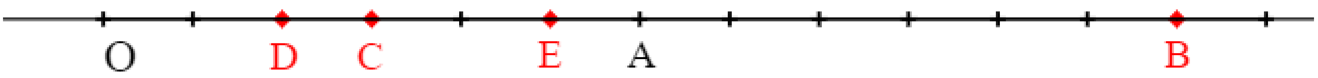
Sur la figure ci-dessous, placer :

B l’image de A par l’homothétie de centre O et de rapport 2 ;

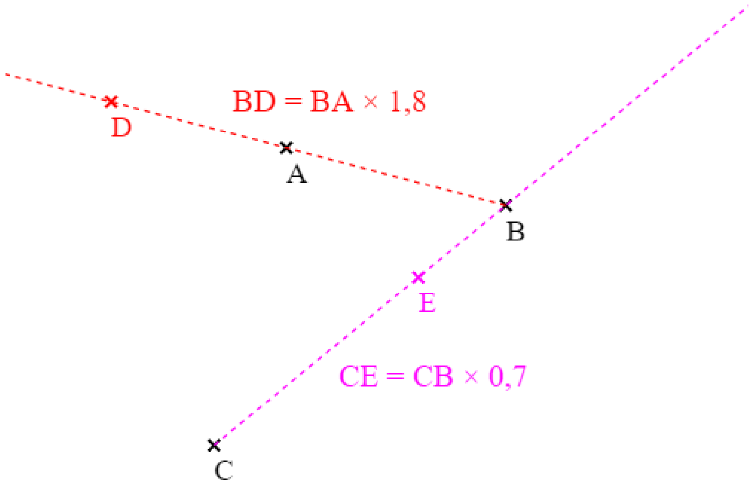
C l’image de A par l’homothétie de centre O et de rapport 0,5 ;

D l’image de A par l’homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$;

E l’image de <u>D</u> par l’homothétie de centre <u>B</u> et de rapport 0,7.



Construis en complétant les programmes de construction :



- le point D, image de A par l’homothétie de centre B et de rapport 1,8 ;

Je trace la droite (AB) en prolongeant bien du côté de A.

AB = 3 cm ; je calcule 1,8 × 3 = 5,4 cm.

Je place D du même côté de A tel que :

BD = 5,4 cm.

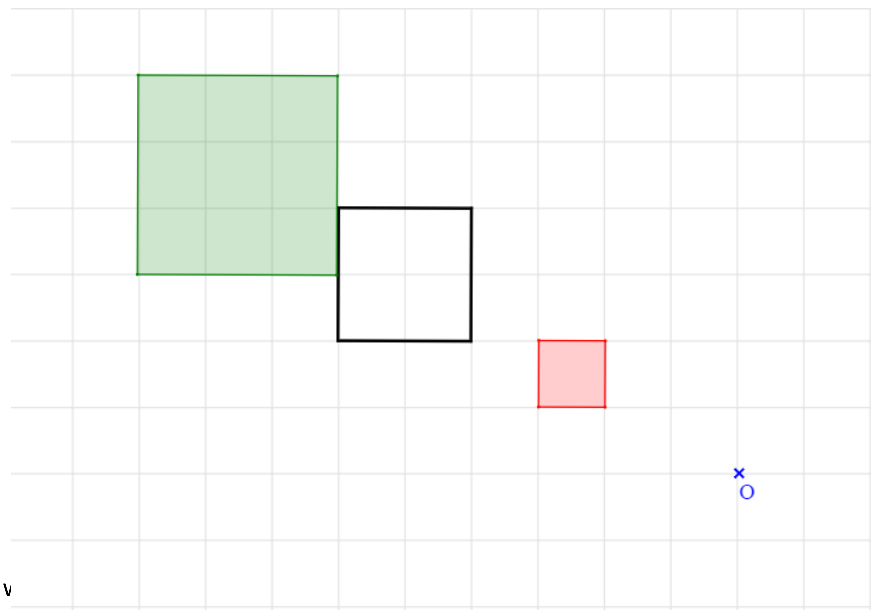
- le point E, image de B par l’homothétie de centre C et de rapport 0,7.

Je trace la droite (BC) en prolongeant bien du côté de B.

BC = 5 cm ; je calcule 0,7 × 5 = 3,5 cm.

Je place E du même côté de B tel que CE = 3,5 cm.

Construis en rouge l’image du carré ci-dessous par l’homothétie de centre O et de rapport 0,5, puis en vert son image par l’homothétie de centre O et de rapport 1,5.



Méthode pour construire l'image d'une figure
par une homothétie de <u>rapport négatif</u>.

→ On construit **l'image de chaque point** caractéristique de la figure.

Pour construire l'image d'un point N par l'homothétie de centre O et de **rapport négatif** $-\boldsymbol{k}$:

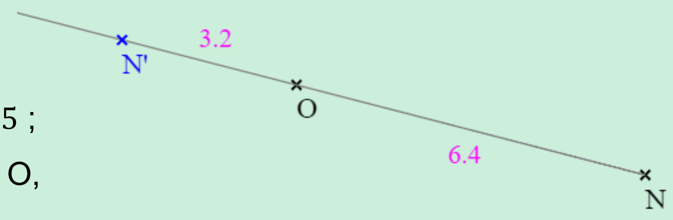
① On trace **la demi-droite [NO)** : l'image N' se trouve **de l'autre côté de N** par rapport à O, donc **on prolonge du côté de O** pour un rapport **négatif**.

② Si besoin, **on mesure** ON, puis **on calcule** $k \times \mathrm{ON}$.

③ On place N' sur [NO) tel que : $\mathrm{ON'} = \boldsymbol{k} \times \mathrm{ON}$

<u>Exemple</u> : rapport $k = -0{,}5$

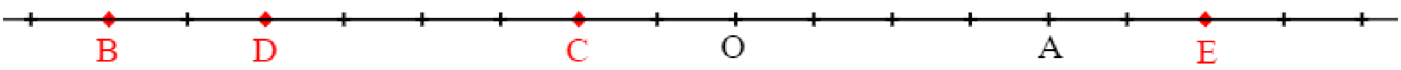
- Je trace [NO) ;
- ON = 6,4 cm ; je calcule $0{,}5 \times 6{,}4 = 3{,}5$;
- je place N' sur [NO) de l'autre côté de O, tel que ON' = 3,2 cm.



Lorsqu'on construit une homothétie de rapport **négatif**, le point et son image se trouvent d'un côté et de l'autre du centre.

Sur la figure ci-dessous, placer :

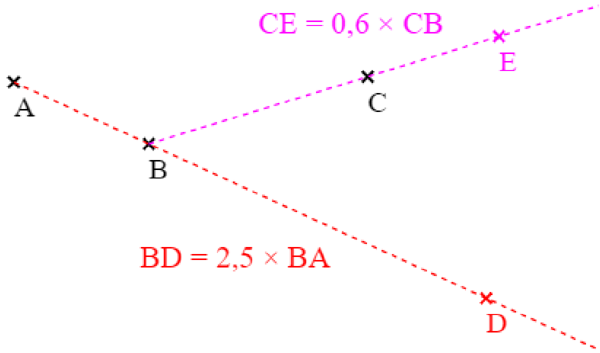
B l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport – 2 ;
C l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport – 0,5 ;
D l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$ **;**
E l'image de <u>D</u> par l'homothétie de centre O et de rapport – 1.



Que dire des points D et E ?

Ils sont symétriques par rapports à O (c'est une symétrie centrale), c'est-à-dire image l'un de l'autre par l'homothétie de centre O et de rapport – 1.

Construis en complétant les programmes de construction :



- le point D, image de A par l'homothétie de centre B et de rapport – 2,5 ;

Je trace la droite (AB) en prolongeant bien du côté de B.

AB = 2 cm ; je calcule $2{,}5 \times 2 = 5$ cm.

Je place D de l'autre côté de A tel que : BD = 5 cm.

- le point E, image de B par l'homothétie de centre C et de rapport – 0,6.

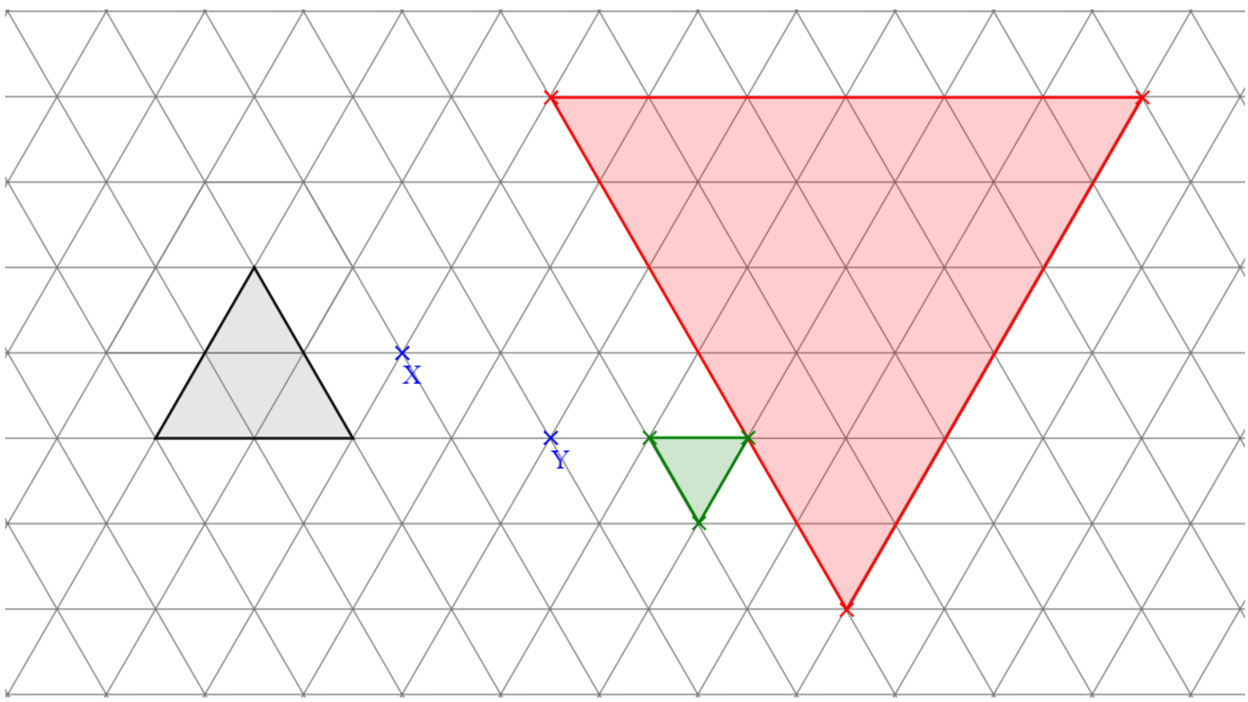
Je trace la droite (BC) en prolongeant bien du côté de C.

BC = 3 cm ; je calcule $0{,}6 \times 3 = 1{,}8$ cm.

Je place E de l'autre côté de B tel que : CE = 1,8 cm.

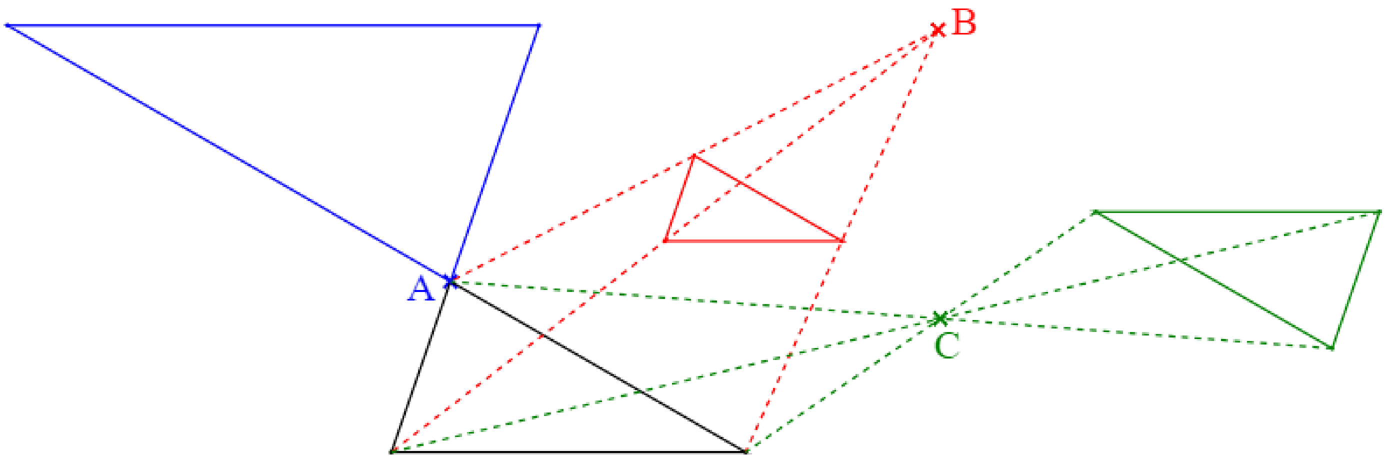
Construis :

- **en rouge l'image du triangle par l'homothétie de centre X et de rapport – 3 ;**
- **puis en vert son image par l'homothétie de centre Y et de rapport – 0,5.**



Construis :

- **en bleu l'image du triangle par l'homothétie de centre A et de rapport – 1,5 ;**
- **puis en rouge son image par l'homothétie de centre B et de rapport 0,5 ;**
- **et enfin en vert son image par l'homothétie de centre C et de rapport – 0,8.**



Propriétés d'une homothétie.

Méthode pour utiliser les propriétés d'une homothétie.

① Une homothétie **conserve** : l'**alignement**, le **parallélisme**, les **milieux** et les **angles**.

→ En associant un élément et son image, on peut **déterminer certaines de ses caractéristiques** (un milieu, un angle, …).

② L'image d'un segment ou d'une droite par une homothétie est un segment ou une droite qui lui est **parallèle**.

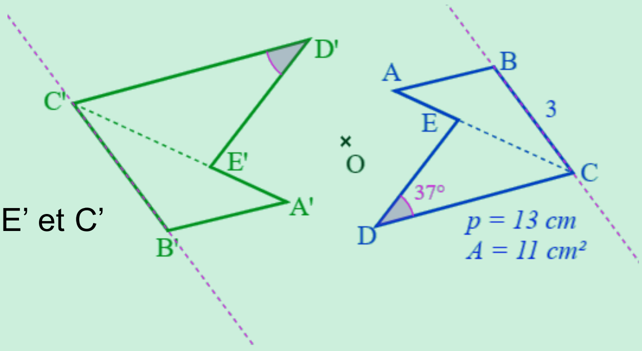
③ Deux figures homothétiques sont **semblables** : l'une est une **réduction** ou un **agrandissement** de l'autre.
L'homothétie **ne conserve pas les longueurs et les aires** mais les « transforme » :

→ Leurs **côtés** sont **proportionnels**.
On peut **calculer des côtés avec le coefficient** d'agrandissement / réduction qui est la distance à zéro du rapport de l'homothétie (une valeur positive).

→ Si les **longueurs** sont **multipliées par k**, les **aires** sont **multipliées par k².**

Exemple :

A'B'C'D'E' est l'image de ABCDE par l'homothétie de centre O et rapport – 1,2 :



① D' est l'image de D, donc : $\widehat{D'} = \widehat{D} = 37°$.

A, E et C sont alignés, donc leurs images A', E' et C' le sont aussi.

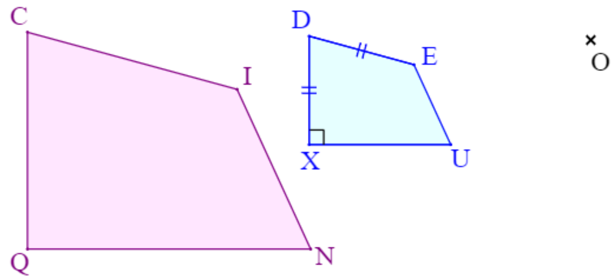
② [B'C'] est l'image de [BC] donc (B'C') // (BC).

③ $\mathrm{BC} = 3$ cm donc $\mathrm{B'C'} = \mathbf{1,2} \times 3 = 3{,}6$ cm

$p_{ABCDE} = 13\ cm$ c'est une longueur, donc : $p_{A'B'C'D'E'} = 13 \times \mathbf{1,2} = 15{,}6\ cm$

$A_{ABCDE} = 11\ cm^2$, donc $A_{A'B'C'D'E'} = 11 \times \mathbf{1,2}^2 = 15{,}84\ cm^2$.

Sur la figure ci-contre, le quadrilatère CINQ est l'image de DEUX par l'homothétie de centre O et de rapport 2.



1. Détermine deux segments égaux :

Les côtés [DE] et [DX] sont égaux, donc leurs images, les côtés [CI] et [CQ], sont égaux car une figure et son image par homothétie sont semblables.

2. Détermine deux droites perpendiculaires :

$\widehat{\mathrm{CQN}} = \widehat{\mathrm{DXU}} = 90°$ car l'homothétie conserve les angles. Donc les droites (CQ) et (QN) sont perpendiculaires.

3. Détermine deux droites parallèles :

Un segment et son image par homothétie sont parallèles, donc :

(DE) // (CI) ; (EU) // (IN) ; (UX) // (NQ) ; (CQ) // (DX)

4. Le périmètre de DEUX est 7 cm ; détermine le périmètre de CINQ :

Un périmètre est une longueur, cette homothétie multiplie les longueurs par 2. Le périmètre de CINQ est égal à $7 \times 2 = 14$ cm.

5. L'aire du quadrilatère DEUX est 3 cm² ; détermine l'aire de CINQ.

Cette homothétie multiplie les aires par 2², donc l'aire de CINQ est $3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12\ \mathrm{cm}^2$

VRAI/FAUX : pour chaque affirmation, indique si elle est vraie ou fausse en justifiant ou corrigeant.

- **Un cercle de rayon 5 cm a pour image un cercle de rayon 8 cm.**

  Affirmation 1 : *le rapport d'homothétie (positif) est* $\frac{5}{8}$. FAUX

Les longueurs sont multipliées par ce coefficient : $5 \times ... = 8$

Le coefficient est $\frac{8}{5}$ car $5 \times \frac{8}{5} = 8$ $mais$ $5 \times \frac{5}{8} = \frac{25}{8} \neq 8$

- **Un carré de côté 10 cm subit une homothétie de rapport 5.**

  Affirmation 2 : *son image a un périmètre de 200 cm.* VRAI

Les longueurs, dont le périmètre, sont multipliées par 5.

$Côté_1 = 10\ cm$ pour l'image : $Côté_2 = Côté_1 \times 5 = 10 \times 5 = 50\ cm$

$Périmètre_1 = 10 \times 4 = 40\ cm$ $Périmètre_2 = Côté_2 \times 4 = 50 \times 4 = 200\ cm$

$ou\ Périmètre_2 = Périmètre_1 \times 5 = 200\ cm$

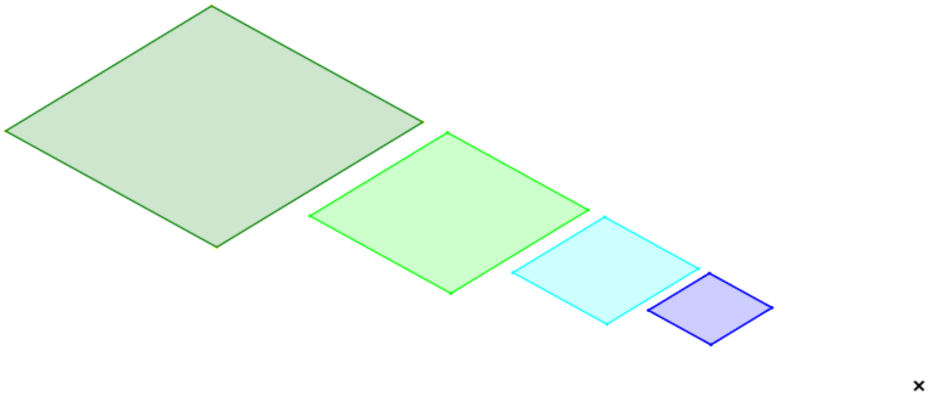
- **Un triangle d'aire 40 cm² a pour image un triangle d'aire 10 cm².**

  Affirmation 3 : *le rapport d'homothétie est forcément – 4.* FAUX

$\mathbf{10 \div 40 = 0,25}$ L'aire a été multipliée par 0,25 ($= \boldsymbol{k}^2$)

$\sqrt{\mathbf{0,25}} = \mathbf{0,5}$ Le rapport est 0,5 ou – 0,5.

On a répété une homothétie de centre O et de rapport 1,5 en partant du losange bleu (on l'a ensuite appliquée à son image le losange turquoise, et ainsi de suite).



Sachant que le petit losange bleu de départ a une aire de 1 cm², détermine l'aire du grand losange vert. Arrondis à 0,1 cm² près.

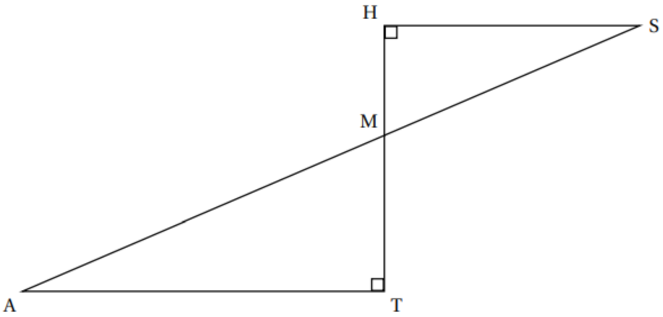
Cette homothétie multiplie les aires par 1,5² c'est-à-dire 2,25.

$$\boldsymbol{Aire_{vert}} = \underbrace{\underbrace{\mathbf{1 \times 2,25}}_{\text{Aire turquoise}} \times \mathbf{2,25}}_{\text{Aire vert clair}} \times \mathbf{2,25} \approx \mathbf{11,4\ cm^2}$$

On peut écrire : $\boldsymbol{Aire_{vert}} = \mathbf{1 \times 2,25^3}$ ← Nombre d'homothéties répétées

Questions de brevet.

1. La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle.



• les points M, A et S sont alignés ;
• les points M, T et H sont alignés ;
• MH = 5 cm ; MS = 13 cm ; MT = 7 cm.

a. Parmi les transformations suivantes quelle est celle qui permet d'obtenir le triangle MAT à partir du triangle MHS ?

Une symétrie centrale	Une symétrie axiale	Une rotation	Une translation	Une homothétie

Les triangles MAT et MHS sont semblables, mais ils n'ont pas les mêmes dimensions, donc les symétries (axiales et centrales), les rotations et les translations conservant les longueurs, ce n'est pas possible. Par contre, une homothétie est possible. Ici, si on veut préciser, c'est une homothétie, de centre M et de rapport $\frac{-7}{5}$.

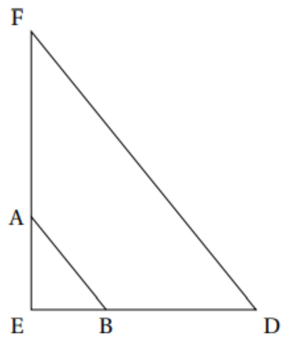
b. Sachant que la longueur MT est 1,4 fois plus grande que la longueur HM, un élève affirme : « L'aire du triangle MAT est 1,4 fois plus grande que l'aire du triangle MHS. » Cette affirmation est-elle vraie ?

L'affirmation est fausse : on sait que le triangle MAT est un agrandissement du triangle MSH de rapport $k = 1{,}4$, donc les longueurs seront bien multipliées par 1,4, mais les surfaces seront multipliées par $k^2 = 1{,}4^2 = 1{,}96$.

2. Sur la figure ci-contre :

• les points E, A et F sont alignés ;
• les points E, B et D sont alignés ;
• les droites (FD) et (AB) sont parallèles ;
• AE = 4,4 cm; EB = 3,3 cm ; AB = 5,5 cm et BD = 6,6 cm.

Une homothétie de centre E transforme le triangle EAB en le triangle EFD. Quel est le rapport de cette homothétie ?



La figure n'est pas en grandeur réelle

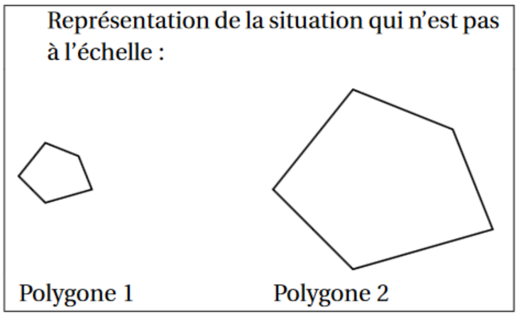
Une homothétie de centre E transformant le triangle EAB en le triangle EFD transforme notamment le segment [EB] en [ED], comme les points B et D sont sur la même demi-droite d'extrémité E, le rapport de l'homothétie est positif.

Il vaut : $ED \div EB \; = \; 9{,}9 \div 3{,}3 \; = \; 3$. Le rapport de cette homothétie est donc 3.

3. Le polygone 2 est l'image du polygone 1 par une homothétie de rapport 3.

L'aire du polygone 1 est égale à 11 cm^2.

Quelle est l'aire du polygone 2 ?



Lors d'une homothétie, les longueurs sont multipliées par un coefficient k, et les aires sont multipliées par k^2 donc :

$$A_{polygone\ 2} = A_{polygone\ 1} \times 3^2 = 11 \times 9 = 99\ cm^2.$$

Pour aller plus loin.

Sur le site de Pass Education, tu trouveras **d'autres ressources** pour réviser cette notion :

Séquence complète	Homothétie Homothétie

PassEducation

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- Exercices 3eme Secondaire Mathématiques : Géométrie Les transformations du plan Transformation par homothétie - PDF à imprimer

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- Constructions et propriétés des homothéties - avec Mon Pass Maths : 3eme Secondaire

Découvrez d'autres exercices en : 3eme Secondaire Mathématiques : Géométrie Les transformations du pla

- Constructions et propriétés - Exercices avec les corrigés sur l'homothétie : 3eme Secondaire
- Homothétie (Introduction) - Exercices avec les corrigés : 3eme Secondaire

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- Exercices 3eme Secondaire Mathématiques : Géométrie Les transformations du plan Transformer une figure par une translation - PDF à imprimer
- Exercices 3eme Secondaire Mathématiques : Géométrie Les transformations du plan Transformer une figure par une rotation - PDF à imprimer

Besoin d'approfondir en : 3eme Secondaire Mathématiques : Géométrie Les transformations du plan Transfo

- Cours 3eme Secondaire Mathématiques : Géométrie Les transformations du plan Transformation par homothétie
- Evaluations 3eme Secondaire Mathématiques : Géométrie Les transformations du plan Transformation par homothétie
- Vidéos pédagogiques 3eme Secondaire Mathématiques : Géométrie Les transformations du plan Transformation par homothétie
- Vidéos interactives 3eme Secondaire Mathématiques : Géométrie Les transformations du plan Transformation par homothétie
- Séquence / Fiche de prep 3eme Secondaire Mathématiques : Géométrie Les transformations du plan Transformation par homothétie